**Вказівки-2016 р. (10 клас)**

**1. Відповідь: Не можливо.**

Розв’язання: У многочлена$ 2х^{2}$ -5х -12 коефіцієнти є цілими числами, тому їх сума або різниця теж цілі числа. Отже, в отриманого таким чином, квадратному тричленіa$x^{2}$ +bx +c коефіцієнти цілі числа. Тому

$b^{2}≡\left(0;1\right)\left(mod4\right), 4ас≡0\left(mod4\right), $D=$b^{2}$–4аc$≡$(0;1)($ mod4$),а 23$≡$3($ mod4$). Отже, отримати дискримінант рівний 23 неможливо.

**2.Відповідь: х=2.**

**Вказівка:**Нехай у=х–2. Тоді $(у+1)^{4}$ +$(у-1)^{4}$=2 $\rightarrow $

$у^{4}$ +**4**$у^{3}$ +6$у^{2}$ + 4у +1 +$у^{4}$–**4**$у^{3}$ +6$у^{2}$– 4у +1 =2$\rightarrow у^{4}$+6$у^{2}$=0$\rightarrow $у=0$ \rightarrow $х=2.

**3.Відповідь: *a*=2.**

**Вказівка:**За умовою задачі $ a^{3}+1=3^{n}$**.** Тому (а+1)($а^{2}$–а+1) =$ 3^{n} \rightarrow $**а+1=**$3^{k}$і$ а^{2}$-а+1=$3^{n-k}\rightarrow (3^{k}-1)^{2}$-$(3^{k}-1)$+1=$3^{n-k}\rightarrow 3^{2k-1}$**-** $3^{k}$ **+1=**$3^{n-k-1}$**.**

Оскільки k$>0$, то одержана рівність можлива тільки при 2k–1=k, n–k–1=0. Тобто при k=1,n =2$ \rightarrow $*a*=2.

**Або**: усі натуральні числа **a** мають вигляд: 3m; 3m+1 та 3m–1. У перших двох випадках: $a^{3}+1≡\left(1;2\right)\left(mod3\right)$, неможливо. В останньому:

$a^{3}+1=\left(3m-1\right)^{3}+1=27m^{3}-27m^{2}+9m=9m\left(3m^{2}-3m+1\right) $ є степенем трійки, врахуємо $3m^{2}-3m+1 ≡1(mod3)$, а тому

 $3m^{2}-3m+1=1\rightarrow m=0 або m=1$, а тоді ***а*** (натуральне) лише одне – при $m=1$, *a*=2.

**4.Відповідь: 1/3.**

**Розв’язання:** Проведемо медіану BK та бісектрису AD. Нехай М – точка перетину медіан трикутника і точка О –перетин бісектрис. Використаємо властивість бісектриси трикутника: АВ:АС=5:6.

**В**

C

**K**

Нехай х-коефіцієнт пропорційності. Отже,

АВ=5х, АС=6х, ВС=5х. Знаючи, що периметр 32,

**D**

отримаємо х=2 і АВ=10, АС=12, ВС=10. З $∆$АВС ($<K=90^{0}):$

OO

**ВК=**$\sqrt{АВ^{2 }+АК^{2}}$**=8. МВ =**$\frac{2}{3}$**ВК=**$\frac{16}{3}$**.**

З трикутника **АВК,** за властивістю бісектриси,

 маємо:**ОВ:ОК=АВ:АК, ОВ: (ВК-ОВ)=10:6,**

**А**

**3ОВ=5(ВК-ОВ),** звідси **ОВ=5.Отже ОМ=**$\frac{16}{3}$ **-5=**$\frac{1}{3}$**.**

**5.Розв’язання.**Позначимо за **А** місто, з якого виходить найбільша кількість доріг. Доведемо методом математичної індукції по кількості **n**міст королівства, що з міста **А** можна проїхати в будь-яке інше місто не більш як двома дорогами.

 База індукції при **n =1,2,3** очевидна**.**

 Припустимо, що при кількості міст **n**при будь-якому виборінапрямків доріг між містами з міста **А** можна проїхати не більшяк двома дорогами в будь-яке інше місто королівства.

 Нехай тепер кількість міст дорівнює **n +1.** Якщо з **А** є пряма дорога у всі міста королівства, то нічого доводити не треба. У протилежному випадку нехай **В**-місто, дорога з якого веде до **А**. Тоді, за припущенням, з міста **А** можна проїхати не більш як двома дорогами в будь-яке інше місто королівства, крім міста **В**. Можливі випадки:

1. існує місто **С,**відмінне від міст **А** та **В**, дорога з якоговеде в місто **А**. Тоді, відкинувши з розгляду місто **С**, отримаємо за припущенням, що з міста **А** в місто **В** можна проїхати не більш як двома дорогами;
2. такого міста С не існує. Тоді в місто **А** входить лише дорога з міста **В**, а тому, навіть відкинувши з розгляду довільне місто **Р**$\ne $**С**, залишається справедливим твердження про те,що з міста **А** виходить найбільша кількість доріг. Тоді за припущенням з міста **А** в місто **В** можна проїхати не більше як двома дорогами.