**Управління освіти, науки, молоді та спорту**

**Кіровоградської обласної державної адміністрації**

**Комунальний заклад « Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського»**

*Завдання ІІ туру Всеукраїнської олімпіади з математики*

**7 клас**

1. За **9** однакових книжок заплатили більше ніж **11 грн**, але менше ніж

**12 грн.** За **13** таких книжок заплатили **15 грн** і декілька копійок, але не більше ніж **16 грн**. Яка вартість однієї книжки?

1. Довести, що добуток **п’яти** послідовних цілих чисел ділиться на **120**.
2. Як можуть **троє** на двомісному мотоциклі за час, не більший, ніж **3** години, подолати шлях у **60 км**, якщо швидкість мотоцикла **50км/год**, а пішохода – **5км/год**.
3. Двоє гравців по черзі на стіл прямокутної форми ставлять фігурки

∆ або **Ō** так, щоб вони не накривалися та не виходили за межі столу. Виграє той, хто покладе останню фігурку. Хто з гравців (перший чи другий) може забезпечити собі виграш? Відповідь обґрунтувати.

1. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких є цілими числами, а периметр дорівнює **30**?

 Кожне завдання оцінюється в 5 балів

На виконання завдань відводиться 4 години

Використання калькуляторів заборонено

2017рік

**Розв’язки**

1. *Вказівка.* Нехай *х* – вартість однієї книжки. Тоді за умовою задачі $\left\{\begin{array}{c}11<9х<12,\\15<13х\leq 16.\end{array}\right.\rightarrow \frac{11}{9}<х\leq \frac{16}{13}\rightarrow х=1,23 грн.$

**Відповідь:**$ 1,23 грн.$

1. *Вказівка.* Розглянемо добуток$ \left(n-2\right)\left(n-1\right)\left(n\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)$, де *n* – ціле число. Серед 5 послідовних чисел знайдеться одне число, яке ділиться на 5. Тому добуток ділиться на 5. Серед 4 послідовних чисел $\left(n-2\right)\left(n-1\right)\left(n\right)\left(n+1\right)$ знайдеться одне число, яке ділиться на 4, але два з цих чисел парні. Тому добуток ділиться на 8. Серед 3 послідовних чисел $\left(n-2\right)\left(n-1\right)\left(n\right)$ знайдеться одне число, яке ділиться на 3. Тому добуток ділиться на 3. Отже, число$ $ $\left(n-2\right)\left(n-1\right)\left(n\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)$ ділиться на 5⋅8⋅3, що і треба було довести.
2. *Вказівка:* Нехай А – водій мотоцикла, а В і С –пішоходи. Нехай за першу годину С відправляється пішки, а А відвозить В на 27,5-й кілометр (В тут, наприклад, зупиняється) і А повертається за С на 5-й кілометр (27,5+22,5=50). За другу годину А відвозить С з 5-того на 55-й кілометр (55–5=50), а В за другу годину проходить 5км (В: 27,5+5=32,5). За третю годину С проходить останні 5км, а А повертається за В (В знаходиться на 32,5 км від початку, А – на 55 км від початку; для А дорога за пішоходом В 55–32,5=22,5 та разом з ним 60–32,5=27,5 км, разом 50 км) і відвозить його до 60-го кілометра.

*Зауважимо,* що якщо після першого пункту (27,5 км) В продовжить рух, то вони упораються за час менший, ніж три години.

1. *Вказівка:* Виграє перший гравець. Він ставить у центр круг, а потім ставить свої фігури симетрично відносно центра кола до ходів другого гравця.
2. *Вказівка:* Нехай a, b, c – довжини сторін трикутника. За умовою задачі a+b+с =30. Без обмеження загальності можна вважати, що a$\leq $b$\leq $c. Відрізки a,b,c утворюють трикутник тоді і тільки тоді, коли с$<$b+а. Отже,

с$<$30–с = а+$ b$ $\leq 2b\leq 2с.$ Тому 10$\leq с<15$ і 15–$ \frac{с}{2}$ $\leq b \leq с.$ Ці умови є і достатніми, щоб відрізки з довжинами b, c, 30–b–c утворювали трикутник. Це випливає з нерівностей 0$<30-2с\leq 30-b-с\leq b$. Оскільки при різних впорядкованих парах ($b$;с) трикутники з сторонами а,$ b$ ,с між собою не рівні, то достатньо обчислити їх кількість.

Якщо с=14, то 8$\leq b\leq 14.$ Трикутників 7.

Якщо с=13, то 8$,5\leq b\leq 13.$ Трикутників 5.

Якщо с=12, то 9$\leq b\leq 12.$ Трикутників 4.

Якщо с=11, то 9,5$\leq b\leq 11.$ Трикутників 2.

Якщо с=10, то 10$\leq b\leq 10.$ Трикутник 1.

Всього 19 трикутників.

**Відповідь: 19.**