**Управління освіти, науки, молоді та спорту**

**Кіровоградської обласної державної адміністрації**

**Комунальний заклад « Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського»**

*Завдання ІІ туру Всеукраїнської олімпіади з математики*

 **11 клас**

**1.** Побудуйте графік функції y=. Користуючись графіком, визначте область значень функції.

**2*.***Знайдіть усі значення параметра **а,** при якому рівняння  **+2=х** має тільки один дійсний корінь.

**3*.***Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює **с**, а сума синусів гострих кутів – **m.**

**4.**В середині трикутника *АВС* вибрані три точки *K, L, M* так, що відстані від точки *K* до сторін трикутника дорівнюють 4 см, 2 см і 10 см, від точки *L*, відповідно, – 1 см, 11 см і 3 см, від точки *M*, відповідно, – 2 см, 13 см і 1 см. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник *АВС*.

**5.** У країні міст, які розташовані у вигляді квадрата розмірами **n**х**n.** Відстань між сусідніми містами – центрами відповідних квадратиків – становить **10км.** Міста сполучаються системою доріг, що складаються із прямолінійних ділянок, які паралельні до сторін квадрата. Якою найменшою можливою може бути довжина цієї системи доріг, якщо відомо, що з довільного міста країни можна дістатися до будь-якого іншого?

 Кожне завдання оцінюється в 5 балів

На виконання завдань відводиться 4 години

Використання калькуляторів заборонено

2017 рік

 **Відповіді:**

***1****.Розв’язання*. Знайдемо область визначення функції

 :

Спростимо функцію: =

Визначаємо значення функції у= х–2 в точці х= –1: у(–1)= –3. Визначимо значення функції у=2–х в точці х= –1: у(–1)=3. Будуємо графік заданої функції:

*y*

 3

–1 0

2

*x*

–3

Областю значень функції є проміжок (–3;

**2.** *Розв’язання*. Задане рівняння рівносильне такій систем,

Якщо дискримінант квадратного рівняння D, то дійсних коренів нема.

Якщо дискримінант квадратного рівняння D, то а=2 х= не задовольняють умову задачі.

Якщо дискримінант квадратного рівняння Dто враховуючи особливість графіка функції ***f(х)=****+(а-4) +2,* одержимо, що єдиність коренях забезпечить умова ***f(2)***з якої знайдемо **а** Крім того, єдиний корінь х=2 отримаємо при а=1. Отже, а.

*Інше розв’язання*:

,

Маємо півпараболу з вершиною у точці (2; 0) і в’язку прямих, що проходять через точку (0; 2) з кутовими коефіцієнтами *k*= –*a*. На рисунку нижче показано граничне положення, при якому є розв’язок (для **суміжного** кута маємо tgα=2:2=1, а тому граничне положення *k*= –1): –1≤*k*<∝. А тоді  для *a*=–*k* отримуємо результат –∝<*а*≤1.



**3.** *Розв’язання*. Нехай α і β – гострі кути трикутника, х і у – відповідні протилежні катети. З рівностей S =cy, S =c, S =ху знаходимо = , ,

ху= 2S. Тоді m =+ = = \* = х+у =сm +4S =S=. Оскільки m =+, то для 0.

Тому задача має розв’язок S = для m

*Інше розв’язання*:

****

1) За умовою sinα+sinβ=m; β=90o–α, тому sinβ=cosα; а тоді sinα+cosα=m; піднесемо до квадрату sin2α+cos2α+2sinα⋅cosα=m2; sin2α=m2–1>0, бо α – гострий кут трикутника, а тому m>1.

2) Нехай *x* – висота, проведена до гіпотенузи, тоді проекції катетів на гіпотенузу дорівнюють, відповідно, *x*⋅tgα, *x*⋅ctgα, маємо рівняння *x*⋅tgα+*x*⋅ctgα=c, зводимо до спільного знаменника, спрощуємо, маємо вираз для висоти *x*⋅(1/(sinα⋅cosα))=с, звідки *x*=с⋅sinα⋅cosα=½⋅с⋅sin2α=½⋅с⋅(m2–1). Площа трикутника S=½⋅с⋅*x*=¼⋅с2⋅(m2–1).

**4.** *Розв’язання*. З’єднаємо точку *К* з вершинами трикутника *АВС*, площа Δ*АВС* дорівнює сумі площ трьох трикутників, які утворилися, отримаємо:

4a+2b+10c=2S. Аналогічні рівності запишемо і для двох інших точок, отримаємо a+11b+3c=2S, 2a+13b+c=2S.

Маємо систему трьох рівнянь з чотирма невідомими. Виразимо усі невідомі через одну, для чого прирівняємо ліві частини:

 звідки З останнього рівняння с=, підставимо у перше звідки , а тоді .

Оскільки площа S=2a+b+5c=2a++5⋅=24, а півпериметр р=½⋅(a+b+c), p=½⋅(a++)=4a, то радіус вписаного кола r = S/p = 6 см.

*Зауважимо*, що усі трикутники зі сторонами , , подібні між собою, а тому, за потреби, можна знайти площу одного з них – наприклад, зі сторонами 4, 13, 15; півпериметр =16, площа =24, радіус вписаного кола r=1,5, тобто коефіцієнт подібності дорівнює чотирьом, а тому сторони даного в умові задачі трикутника є у чотири рази більшими, тобто 16, 52, 60 см, а площа – у 16 разів більша, тобто 24⋅16=384 см2.

**Відповідь: 6 см.**

**5.** *Розв’язання*. Зрозуміло, що менше, ніж дільниць доріг бути не може. Вказану ж кількість дільниць легко одержати, провівши одну вертикальну дорогу довжиною **10(n-1)**км вздовж сторони квадрата та **n** горизонтальних доріг такої ж довжини (див. рис.). Отже, мінімальна довжина такої системи доріг буде **10**км.

